Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée dans les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité du blé et étude de la farine La Romaine (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2023/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l’eau d’un spa

Après la coupure de l’alimentation électrique, la température de l’eau d’un spa, initialement à 38 °C et soumis à une température ambiante de 25 °C, est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L’exercice étudie cette fonction, son évolution et sa limite, puis demande d’analyser une alarme et un algorithme de suivi de la température.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

On met l’équation sous la forme $y' = -0,05y$. Une équation différentielle de la forme $y' = ay$ admet pour solutions les fonctions $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0,05$. On obtient donc toutes les solutions sur $[0;+\infty[$, y compris la solution nulle lorsque $C = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer sur [0 ; +∞[une fonction constante qui est solution particulière de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 1,25.

On cherche une solution constante de valeur k. Sa dérivée est nulle, donc l’équation devient $0,05k = 1,25$. En divisant par $0,05$, on trouve $k = 25$. Cette fonction constante vérifie bien l’équation différentielle avec second membre, ce qui donne une solution particulière sur tout l’intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction constante $y(t) = 25$ est une solution particulière.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

Pour une équation différentielle linéaire avec second membre, les solutions sont obtenues en ajoutant une solution particulière à toutes les solutions de l’équation homogène associée. Ici, la solution particulière constante vaut 25, et les solutions homogènes sont $Ce^{-0,05t}$. La constante C peut prendre toute valeur réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

D’après la question précédente, $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. La condition initiale impose $f(0) = 38$. Comme $e^0 = 1$, on a $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient l’expression demandée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer la valeur de f(24), arrondie à 10^-1, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 dans le modèle : $f(24) = 13e^{-0,05\times 24} + 25 = 13e^{-1,2} + 25 \approx 28,9155$. L'arrondi au dixième est donc $28,9$. Cette valeur représente la température de l'eau du spa, en degrés Celsius, 24 heures après la coupure de l'alimentation électrique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(24) \approx 28,9\ ^\circ\text{C}$, 24 h après la coupure.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.

On dérive $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle composée, la dérivée de $e^{-0,05t}$ est $-0,05e^{-0,05t}$. Le terme constant 25 a une dérivée nulle. Il reste à multiplier par le coefficient 13 pour obtenir l'expression de la dérivée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis dire si ce sens de variation paraît cohérent avec le contexte et argumenter la réponse.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -0,65e^{-0,05t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Ce résultat est cohérent avec la situation : le chauffage est coupé et l'eau se refroidit en se rapprochant de la température ambiante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, $-0,05t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le terme exponentiel s'annule alors à la limite, tandis que le terme constant reste égal à 25. La limite de f est donc 25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

La limite obtenue signifie que, selon le modèle, lorsque le temps écoulé devient très grand, la température de l'eau se rapproche de 25 °C. Cette température correspond à la température ambiante extérieure, supposée constante. L'eau tend donc vers un équilibre thermique avec l'environnement du spa.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau tend vers la température ambiante : **25 °C**.

Question 4. a). Une alarme sonore est émise lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé après la coupure avant que l'alarme retentisse. Donner la valeur exacte de cette durée, puis sa valeur arrondie à la minute.

Le seuil est atteint lorsque $f(t) = 36$, soit $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$. On obtient $e^{-0{,}05t} = 11/13$, puis $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cela correspond à environ $200,46$ minutes. Comme l'alarme sonne lorsque la température est strictement inférieure au seuil, elle retentit juste après cet instant de franchissement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Franchissement à $20\ln(13/11)$ h, soit **200 min** à la minute près.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui initialise H à 0 et T à 38 °C, puis augmente H d'une unité et calcule T = 13e^(-0,05H) + 25 tant que T ≥ 34.

À $H = 7$, la température calculée vaut $13e^{-0{,}35} + 25 \approx 34,16$, donc la condition $T \geq 34$ reste vraie. L'algorithme augmente alors encore H. À $H = 8$, il obtient $13e^{-0{,}4} + 25 \approx 33,71 < 34$: la boucle s'arrête et affiche cette dernière valeur de H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

8

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

> L'algorithme teste la température à des heures entières après la coupure. Il augmente H d'une unité tant que la température calculée reste supérieure ou égale à 34 °C, puis s'arrête dès qu'elle passe

sous ce seuil. Il détermine ainsi la première heure entière à laquelle le modèle prévoit une température inférieure à 34 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Il détermine la première heure entière où la température de l’eau est inférieure à 34 °C.

2. Contrôle qualité du blé et étude de la farine La Romaine

Une minoterie contrôle l'extensibilité d'une pâte et l'humidité de livraisons de blé, puis étudie le poids des sacs de farine au moyen d'une loi normale. L'exercice examine également les probabilités qu'un client teste la farine La Romaine selon son type de boulangerie, ainsi que le nombre de clients concernés dans un échantillon.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, calculer la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne vaut $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. L'écart-type de la série est $\sqrt{[(104-76)^2 + (81-76)^2 + (83-76)^2 + (57-76)^2 + (55-76)^2]/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). Dans cette question, on considère que l'écart-type de la série est σ = 18 mm. Le processus qualité exige cinq nouveaux tests si l'une des cinq valeurs est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ]. Vérifier que le technicien n'a pas besoin de procéder à ces nouveaux tests.

Borne	Calcul	Valeur
Inférieure	$76 - 2 \times 18$	40 mm
Supérieure	$76 + 2 \times 18$	112 mm

Les cinq mesures, de 55 à 104 mm, appartiennent à cet intervalle : aucun nouveau test n'est nécessaire.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les cinq mesures sont dans $[40; 112]$ mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. Deux camions transportent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Le cahier des charges exige un taux d'humidité inférieur à 13 % dans un même silo. Montrer que le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans un même silo vide.

La masse totale de blé est $29\,540 + 14\,540 = 44\,080$ kg. La masse d'eau correspondante est $29\,540 \times 0,124 + 14\,540 \times 0,141 = 5\,713,1$ kg. Le taux d'humidité du mélange vaut donc $\frac{5\,713,1}{44\,080} \times 100 \approx 12,961\,\%$, inférieur à 13 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le mélange atteint environ 12,961 % d'humidité : le déchargement dans le même silo est autorisé.

Partie B

Question 1. La variable aléatoire X associe à chaque sac son poids en kilogrammes et suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable : $Z = (X - 25,2)/0,1$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0,02275$. Arrondie au millième, cette probabilité vaut 0,023.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2. a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^-2 près.

Pour une loi normale, l'intervalle centré sur la moyenne contenant environ 95 % des valeurs a pour demi-largeur $h \approx 1,96\sigma$. Ici, $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit 0,20 kg au centième près.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Un réel convenable est $h = 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique de la fonction de densité fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

Pour la loi de X, environ 95 % des masses se trouvent dans l'intervalle centré sur 25,2 kg de demi-largeur $1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit entre 25,004 kg et 25,396 kg. Or, sur le graphique fourni, la courbe est nettement plus étalée autour de 25,2 kg. Elle ne peut donc pas représenter la densité de cette loi normale.

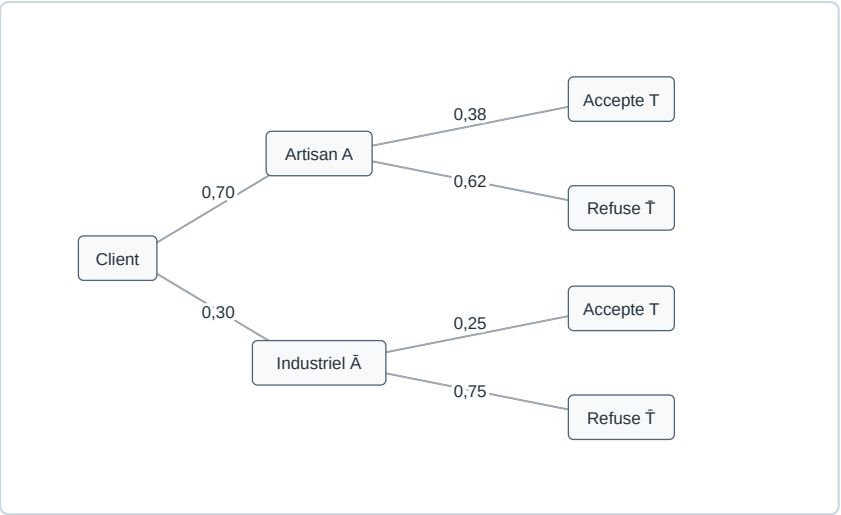
> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> La courbe est trop étalée : 95 % des masses devraient se trouver entre 25,004 kg et 25,396 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré : 70 % des clients sont des artisans boulangers, 38 % des artisans acceptent de tester la farine La Romaine et 25 % des boulangers industriels l'acceptent.

On note A l'événement « artisan boulanger » et T l'événement « accepte de tester ». Les branches de refus portent les probabilités complémentaires à celles d'acceptation.

Arbre pondéré des clients et de leur acceptation



Les probabilités issues de chaque nœud somment à 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : $P(A) = 0,70$, $P(\bar{A}) = 0,30$; acceptation : 0,38 depuis A, 0,25 depuis $\bar{A}$.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

La probabilité qu'un client soit artisan boulanger et accepte de tester la farine est $P(A \cap T) = P(A) \times P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Par la formule des probabilités totales, $P(T) = P(A)P(T \mid A) + P(\bar{A})P(T \mid \bar{A})$. Donc $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un client accepte de tester La Romaine est $0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^-3 près, la probabilité que ce client soit un artisan boulanger.

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A \mid T) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,266}{0,341} \approx 0,780$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un client ayant testé la farine soit artisan boulanger est $0,780$.

Question 4. a). La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.

Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, on calcule $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k} \approx 0,125$. Le résultat est arrondi au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'espérance d'une loi binomiale vaut np. Ainsi, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur de nombreux échantillons de 200 clients, environ 68 clients par échantillon auront testé la farine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(Y) = 68,2$, soit environ 68 clients sur 200 en moyenne.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1, comporte deux exercices de dix points chacun. Elle mobilise la résolution d'une équation différentielle pour modéliser le refroidissement d'un spa, puis les statistiques descriptives, les moyennes pondérées, les lois normale et binomiale, les arbres et les probabilités conditionnelles autour des contrôles d'une minoterie et du test de la farine La Romaine. Durée et coefficient non précisés.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Pour f(t) = 13e^(-0,05t) + 25, le terme exponentiel tend vers 0 et la température tend vers 25 °C.
- Pour une loi normale de moyenne μ, l'intervalle [μ − h ; μ + h] est centré sur μ et se traite par symétrie.
- Pour Y suivant une loi binomiale B(n,p), l'espérance est E(Y) = np ; une probabilité conditionnelle se calcule par P(A|T) = P(A∩T)/P(T).

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer l'écart-type de la variance et utiliser les valeurs du tableau sans les confondre.
- Pour mélanger deux lots, calculer le taux d'humidité moyen pondéré par les masses.
- Pour la loi normale, tenir compte de la moyenne, de l'écart-type et de la forme de la courbe fournie.
- Dans un arbre pondéré, placer les probabilités conditionnelles sur les branches et justifier les probabilités totales.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer le temps auquel l'eau du spa atteint une température donnée ?

On remplace f(t) par la température cible dans f(t) = 13e^(-0,05t) + 25, puis on résout l'équation en t. La durée est obtenue en heures ; pour l'exprimer à la minute, on convertit la partie décimale des heures.

Q : Comment calculer le taux d'humidité après le mélange des deux livraisons ?

Calculez la masse totale d'eau contenue dans les deux lots en multipliant chaque masse de blé par son taux d'humidité. Divisez ensuite cette masse d'eau par la masse totale de blé et comparez le taux obtenu à 13 %.

Q : Comment organiser les calculs de probabilités de la partie C ?

Commencez par inscrire les probabilités des catégories de clients et les probabilités conditionnelles sur l'arbre. Utilisez ensuite les probabilités d'intersection et totales, puis la loi binomiale donnée pour les 200 clients.

Q : Quels éléments de rédaction faut-il soigner dans cette épreuve ?

Présentez une démarche qui répond explicitement à la consigne, indiquez les formules utilisées et concluez dans le contexte. Respectez les arrondis demandés, les unités et la distinction entre probabilité simple et probabilité conditionnelle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2023/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Cybersécurité, Informatique et réseaux, Électronique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.