Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude d’une fonction (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités et estimation statistique dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2023/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude d’une fonction

La distance entre le point M du tiroir et le point O du meuble est modélisée en fonction du temps par une solution d’équation différentielle. L’exercice étudie ses conditions initiales, son évolution, le seuil de fermeture, un algorithme et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si l’un de ses facteurs est nul.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. La solution générale est donc une combinaison des exponentielles associées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M, situé à 20 cm de O, et de sa vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et f'(0).

À $t = 0$, la distance OM est de 20 cm : $f(0) = 20$. La vitesse est la dérivée de la distance par rapport au temps, et sa valeur initiale est donnée comme étant -10 cm·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En utilisant l’expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression admise : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette valeur est exprimée en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}157$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes, en justifiant.**

Comme f est décroissante, il suffit de vérifier la distance à 4 secondes. On trouve $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, strictement inférieur à 0,5 cm. Le seuil est donc atteint avant 4 secondes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B. Étude de fonction

Question 1.a. **Sachant que la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞ est nulle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque $t \to +\infty$, les deux termes exponentiels e^{-t} et e^{-4t} tendent vers zéro. Leur combinaison linéaire tend donc également vers zéro.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite de f que sa courbe représentative possède une asymptote, puis en donner une équation.**

Comme $f(t)$ tend vers la valeur finie 0 lorsque $t \to +\infty$, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive les deux exponentielles avec $(e^{at})' = ae^{at}$:

$$f'(t) = \frac{70}{3}(-1)e^{-t} - \frac{10}{3}(-4)e^{-4t}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Puisque $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ est 0.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	0

✓ RÉPONSE À RETENIR

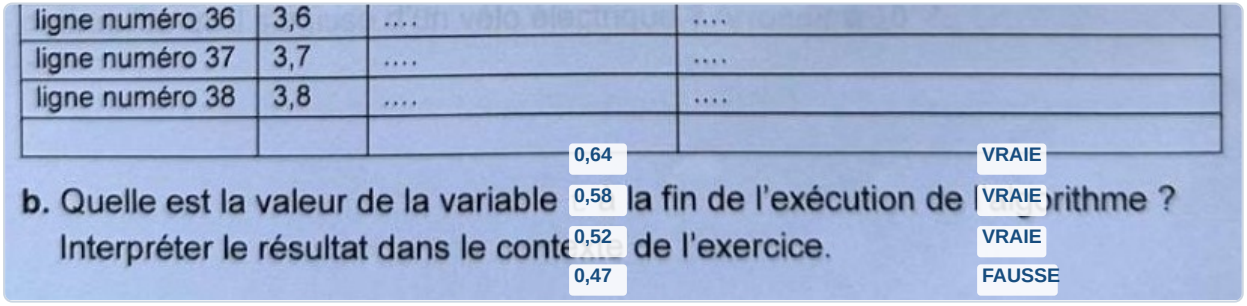
f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en arrondissant les valeurs de f(t) au centième et en indiquant la valeur de la condition jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

Le pas de l'algorithme est de 0,1 seconde. Il teste si $f(t) > 0{,}5$ et s'arrête au premier rang où cette condition est fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$ s.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

À $t = 3{,}8$, la condition est vraie car $f(3{,}8) \approx 0{,}522$. À $t = 3{,}9$, elle devient fausse car $f(3{,}9) \approx 0{,}472$: la boucle s'arrête alors.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : la distance est inférieure à 0,5 cm, le tiroir est fermé.

Question 4.a. **Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. **Parmi les propositions, choisir le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme de Taylor affiché dans le sujet est $20 - 10t - 15t^2$. À l'ordre deux, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Première proposition : $20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. **À partir du développement limité, indiquer si, au voisinage de zéro, la courbe représentative de f est au-dessus ou en dessous de sa tangente T.**

La tangente a pour équation $y = 20 - 10t$. D'après le développement limité, $f(t) - (20 - 10t) = -15t^2 + o(t^2)$, qui est négatif pour $t > 0$ suffisamment proche de 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au voisinage de 0, la courbe est en dessous de sa tangente.

2. Probabilités et estimation statistique dans un magasin de vélos

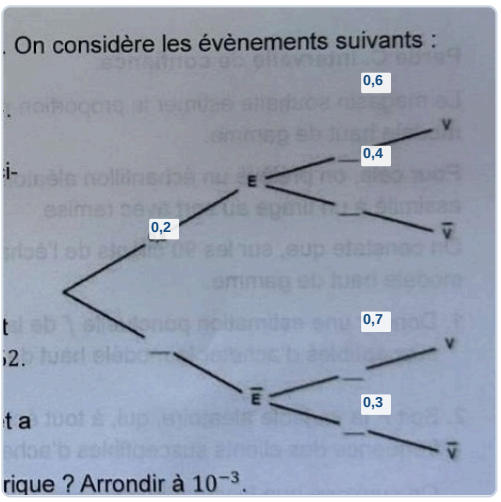
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques et étudie la fréquence à laquelle ces prêts débouchent sur une vente. L'exercice porte aussi sur la durée de réparation d'un échantillon de vélos et sur l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A. Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et le fait que le prêt débouche ou non sur une vente.

Les probabilités des branches de premier niveau sont 0,8 pour les vélos électriques et 0,2 pour les vélos mécaniques. Sur chaque branche, on complète par la probabilité complémentaire de non-vente : 1 moins la probabilité de vente.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2. Après électrique : vente 0,6, non-vente 0,4. Après mécanique : vente 0,7, non-vente 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V), où E désigne l'événement « le vélo est électrique » et V l'événement « le prêt débouche sur une vente ».

Le chemin correspondant à une vente après le prêt d'un vélo électrique a pour probabilités successives 0,8 et 0,6. La probabilité de ce chemin est leur produit : $P(E \cap V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Une vente peut suivre un prêt électrique ou un prêt mécanique. Ces deux cas sont incompatibles. En appliquant la formule des probabilités totales :

$P(V) = P(E)P_E(V) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}(V) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 = 0,62.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62.$

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo débouche sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

La probabilité cherchée est conditionnelle à la vente. On divise la probabilité d'un prêt électrique débouchant sur une vente par la probabilité totale d'une vente : $P(E \mid V) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E \mid V) \approx 0,774.$

Partie B. Loi binomiale

Question 1. **La variable aléatoire X compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre. Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres.**

Chaque réparation constitue un essai, avec pour succès « nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre » et pour probabilité de succès 0,62. L'échantillon comporte 80 réparations. Les paramètres de la loi binomiale sont donc le nombre d'essais et la probabilité de succès.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62).$

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 succès est $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40} \approx 0,00829$. L'arrondi au millième est 0,008.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008.$

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Le nombre de réparations qui ne nécessitent pas moins d'une heure est $80 - X$. La condition demandée revient à $X > 80 - X$, donc à $X \geq 41$. La probabilité correspondante est $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 1 - 0,0191 = 0,9809$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est $0,981$.

Partie C. Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon : $f = \dfrac{54}{90} = 0,60$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,60$, soit 60 %.

Question 2.a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.**

Avec $f = 0,60$ et $n = 90$, la marge d'erreur donnée par la formule est $1,96\sqrt{\dfrac{0,60(1-0,60)}{90}} \approx 0,101214$. On obtient les bornes en retranchant et en ajoutant cette marge à la fréquence observée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. **Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance déterminé.**

Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas que la proportion inconnue appartienne à l'intervalle obtenu pour cet échantillon. Le niveau de confiance décrit la fiabilité de la méthode sur des échantillons répétés, pas une certitude pour cet intervalle particulier.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Non, on ne peut pas en être certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, d'une durée de deux heures. Le coefficient est de 2, sauf pour Traitement des matériaux, où il est de 3. Deux exercices de 10 points portent sur la fermeture d'un tiroir modélisée par une fonction exponentielle et sur un magasin de vélos, mobilisant équations différentielles, analyse, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ a deux racines réelles distinctes.
- La distance du tiroir est modélisée par $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, pour $t \geq 0$.
- Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, X compte les succès de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- L'intervalle fourni à 95 % est $[f - 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales et distinguer la distance f(0) de la vitesse f'(0).
- Pour l'algorithme, suivre l'incrément de 0,1 et vérifier la condition à chaque étape jusqu'à ce qu'elle devienne fausse.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement conditionnant avant d'appliquer la formule.
- Dans l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée, l'effectif de l'échantillon et interpréter correctement le niveau de confiance.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la première partie ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent les exponentielles de la solution générale, puis les conditions initiales permettent de déterminer les constantes.

Q : Comment traiter la question de loi binomiale sur les réparations ?

On identifie les paramètres n = 80 et p = 0,62, puis on utilise la loi binomiale pour calculer la probabilité demandée. Pour la comparaison des durées, il faut traduire exactement les deux nombres comparés dans l'énoncé.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

L'épreuve comporte deux exercices notés chacun sur 10 points et plusieurs parties indépendantes. Avancez sur les questions accessibles, puis gardez du temps pour contrôler les calculs, les arrondis et les interprétations.

Q : Que signifie un intervalle de confiance à 95 % ?

Il ne garantit pas que la proportion p appartient à l'intervalle obtenu pour cet échantillon. Le niveau de 95 % décrit la proportion d'intervalles qui contiendraient p si la méthode était répétée sur de nombreux échantillons.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2023/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Cybersécurité, Informatique et réseaux, Électronique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.