Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction. L'étude mobilise une équation différentielle, les variations et la limite de cette fonction, le calcul d'une distance parcourue et un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

On utilise la formule donnée pour l'équation homogène $y' + ay = 0$: ses solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a par cette valeur dans la solution générale. La constante k peut prendre toute valeur réelle, y compris zéro, et la solution est définie sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de l'équation (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche est donc égal au second membre pour tout t de l'intervalle considéré. Cela vérifie que g est une solution particulière de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$. Toute autre solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée $y' + 0,8y = 0$. D'après la question précédente, ces solutions homogènes sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec k réel. On obtient ainsi l'ensemble complet des solutions de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$. On en déduit $k = 15$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction qui modélise la vitesse du chariot pendant le freinage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction est définie par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Par conséquent, le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro. Le terme constant reste égal à 5 : la limite de la somme est donc 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite de f que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.

On a établi que $f(t)$ tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$. Une courbe dont l'ordonnée tend vers une valeur constante admet une asymptote horizontale d'équation égale à cette valeur. Ainsi, la courbe représentative C se rapproche de la droite horizontale d'ordonnée 5 lorsque t augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +[$. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t)$ tend vers 5 quand t tend vers $+\infty$. Ces valeurs et le signe de la dérivée donnent le tableau suivant.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout instant fini $t \geq 0$, on a $e^{-0,8t} > 0$. Il en résulte que $15e^{-0,8t} > 0$, puis que $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste donc strictement positive pendant toute la durée modélisée. Elle tend vers 5 m·s⁻¹ sans atteindre zéro : selon ce modèle, le chariot ne s'arrête pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à 5 m·s⁻¹ et tend vers 5 m·s⁻¹.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$: F est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4.b. À l'aide de l'intégrale donnée, calculer la distance exacte parcourue par le chariot entre t_0 = 0 et t_1 = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette valeur exacte est environ 15,3251 m ; arrondie au centimètre, elle vaut 15,33 m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne le polynôme de Taylor $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Il faut donc retenir la proposition contenant ce reste, et non celle qui ajoute simplement $\varepsilon(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. D'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient son équation sous forme réduite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d'un système électrique

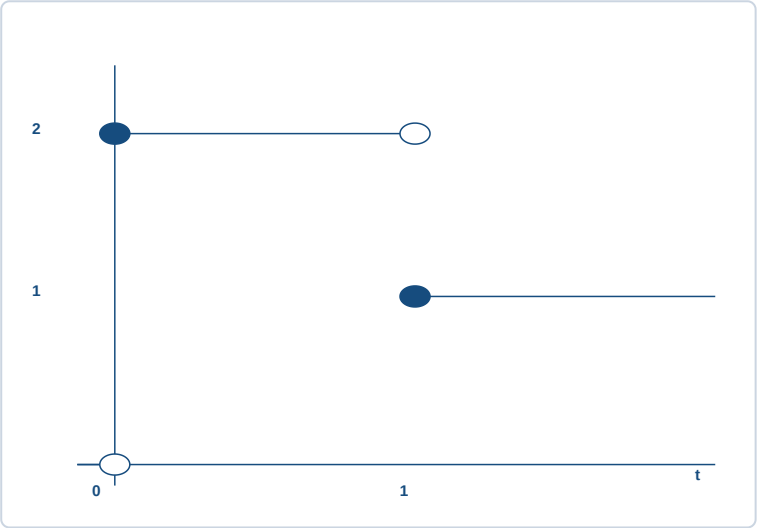
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) − U(t − 1), et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). L'exercice utilise les transformées de Laplace pour établir le signal de sortie, obtenir ses expressions selon les intervalles et représenter graphiquement les signaux.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction e(t).

La définition de l'échelon donne un signal nul pour $t < 0$. À partir de $t = 0$, $2U(t) = 2$ et le terme retardé est nul jusqu'à $t = 1$. À partir de $t = 1$, les deux échelons valent 1, donc le signal vaut $2 - 1 = 1$. Les points pleins et ouverts indiquent les valeurs aux instants de saut.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité de la transformée de Laplace, on transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$, car le second échelon est retardé d'une unité.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/[p(p + 1)]]e⁻ᵖ.

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. On remplace $H(p)$ par $1/(p+1)$ et $E(p)$ par l'expression obtenue en partie A. En distribuant le facteur $1/(p+1)$, on sépare le terme direct et le terme retardé, ce qui donne l'égalité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

On réduit le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Son numérateur devient $(p+1) - p = 1$, ce qui donne exactement le membre de gauche. L'égalité est ainsi vérifiée pour les valeurs de p pour lesquelles les dénominateurs sont non nuls.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Déterminer les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), (1/p)e⁻ᵖ et [1/(p + 1)]e⁻ᵖ, en utilisant le formulaire.

Le formulaire donne directement les transformées des fonctions causales. Pour les deux expressions multipliées par e^{-p}, on applique le retard d'une unité : la fonction devient nulle avant $t = 1$, puis prend la forme de la fonction initiale évaluée en $t - 1$.

1. $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

Avec la décomposition précédente, $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Sur $0 \leq t < 1$, les fonctions retardées contiennent $U(t-1) = 0$ et ne contribuent donc pas. Les termes non retardés donnent alors directement l'expression de $s(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.

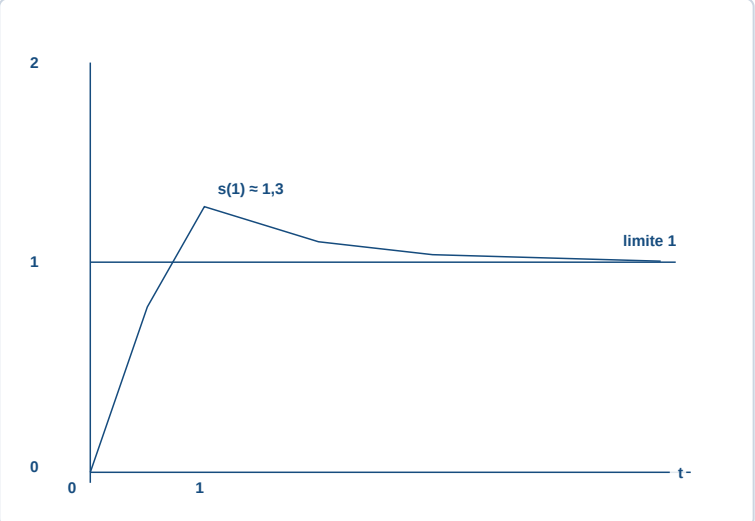
On évalue l'expression donnée pour $t \geq 1$ à l'instant $t = 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. En utilisant $e\,e^{-1} = 1$, on obtient la forme exacte $2 - 2/e$, puis son arrondi au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.

La première branche est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ pour $0 \leq t < 1$. À $t = 1$, les deux expressions donnent la même valeur, $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, la seconde branche $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$ décroît vers 1. Le tracé conserve la continuité au raccord et montre l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, atteint $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît donc et la limite est égale au terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Ses deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique par les équations différentielles, l'intégration, le développement limité et les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution homogène.
- Si f(t) tend vers 5 quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = 5.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- Un décalage temporel d'une unité multiplie la transformée de Laplace par e^{-p}.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir trouvé la solution générale de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale f(0) = 20.
- Utiliser le signe de f' pour les variations et la limite de f pour décider si la vitesse s'annule.
- Calculer la distance avec une différence de primitive aux bornes et respecter l'arrondi au centimètre.
- Pour les signaux, distinguer les intervalles séparés par t = 1 et appliquer correctement le décalage dans la transformée de Laplace.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Enfin, utilisez f(0) = 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse ?

La distance est l'intégrale de la vitesse sur la durée considérée. Si F est une primitive de f, alors $d = F(t_1) - F(t_0)$; convertissez ensuite le résultat en mètres et arrondissez au centimètre.

Q : Comment gérer les deux exercices pendant les deux heures ?

Les exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre eux, avancez dans l'ordre qui vous convient et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités, tracés et arrondis.

Q : Quels points vérifier pour les signaux et leurs transformées ?

Respectez la causalité et le changement de signal à t = 1. Pour les transformées, appliquez les formules du formulaire, notamment le facteur e^{-p} pour un décalage d'une unité, puis contrôlez les expressions obtenues sur chaque intervalle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Cybersécurité, Informatique et réseaux, Électronique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.