Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

# Mathématiques - Groupement B des BTS

**Session 2018** • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire** (13 questions) **Page 3**

2. **Probabilités et obsolescence programmée des smartphones** (13 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

**Sujet officiel (PDF) :** https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2018/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

# 1. Modélisation du départ d’un train à très haute vitesse et calcul d’aire

Le sujet étudie le démarrage d’un wagon propulsé dans un tube à basse pression, avec l’objectif d’atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. Les questions mobilisent une équation différentielle, l’étude de la distance et de la vitesse, puis le calcul de l’aire d’une pièce destinée à une gare.

## A. Résolution d'une équation différentielle

**Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[ l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0 en utilisant la formule fournie.**

L’équation s’écrit sous la forme fournie $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. La formule donne alors $y(t) = ke^{-at}$. En remplaçant $a$ par sa valeur, on obtient la famille des solutions sur tout l’intervalle $[0, +\infty[$. La constante $k$ peut être n’importe quel réel, y compris zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sur $[0, +\infty[$ sont $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

**Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.**

On calcule la dérivée de la fonction proposée : $g'(t) = -15$. Puis on remplace $g$ et $g'$ dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$. On retrouve le membre de droite pour tout $t$ de l’intervalle considéré. La fonction proposée vérifie donc bien l’équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \in [0, 3]$, $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$ : $g$ est bien solution de $(E)$.

**Question 3°. Déduire de la solution particulière g l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.**

Une solution particulière de $(E)$ est $g(t) = -15t - 75$. L’écart entre deux solutions de l’équation complète vérifie l’équation homogène associée, dont les solutions sont $ke^{0,2t}$. On ajoute donc à $g$ toute solution homogène. En faisant varier la constante réelle $k$, on obtient l’ensemble complet des solutions sur l’intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L’ensemble des solutions est $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, pour toute constante réelle $k$.

**Question 4°. Déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant qu'à t = 0 le wagon est au point de départ.**

La solution générale obtenue précédemment est $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. À l'instant initial, $f(0) = k - 75$. La condition $f(0) = 0$ impose donc $k = 75$. En remplaçant la constante dans la solution générale, puis en factorisant les termes exponentiels, on obtient la fonction qui modélise la distance parcourue à partir du point de départ.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant la condition initiale est $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$, sur $[0, 3]$.

## B. Étude de fonction et application

**Question 1° a). Résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0 à partir des expressions de f et f' fournies par le logiciel de calcul formel.**

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. L'inéquation $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme la fonction exponentielle est croissante et que $e^0 = 1$, cela revient à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Sur l'intervalle $[0, 3]$, elle est vérifiée partout, avec égalité uniquement en $t = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur tout l'intervalle $[0, 3]$, $f'(t) \geq 0$, avec $f'(0) = 0$.

**Question 1° b). Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur [0, 3].**

| **Valeurs de** $t$ | $0$ | $]0, 3]$ |
|---|---|---|
| Signe de $f'(t)$ | $0$ | $+$ |
| Variation de $f$ | Croissante sur $[0, 3]$ | |

La dérivée est positive sur l'intervalle, sauf en zéro où elle s'annule. La fonction distance ne diminue donc jamais : elle est croissante sur $[0, 3]$. Elle commence à $f(0) = 0$, conformément au départ du wagon depuis son point initial.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La distance parcourue, représentée par $f$, est croissante sur l'intervalle $[0, 3]$.

**Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.**

La distance parcourue au bout d'une minute est la valeur de la fonction en $t = 1$. On remplace donc $t$ par 1 dans l'expression fournie : $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Le calcul donne environ $1,6052$ km. L'arrondi au dixième consiste à conserver un chiffre après la virgule : le wagon a parcouru environ 1,6 km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après une minute, le wagon a parcouru environ $1,6$ km, arrondi au dixième de kilomètre.

**Question 3° a). Sachant que la vitesse en kilomètres par minute à l'instant t correspond à f'(t), déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes et arrondir au dixième.**

La vitesse instantanée en kilomètres par minute est donnée par la dérivée $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À deux minutes, on calcule $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$, soit environ $7,3774$ km/min. Arrondie au dixième, cette vitesse vaut $7,4$ km/min. Pour la comparer à l'objectif exprimé en kilomètres par heure, on la multiplie par 60.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À deux minutes, la vitesse est d'environ $7,4$ km/min, soit $442,6$ km/h.

**Question 3° b). Indiquer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée et du délai fixé.**

L'objectif est d'atteindre $400$ km/h, soit $400/60$ km/min, avant deux minutes. La vitesse $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$ est croissante. En résolvant $15(e^{0,2t} - 1) = 400/60$, on obtient $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute. Le seuil est donc atteint avant l'échéance fixée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint : le seuil de $400$ km/h est franchi après environ $1,839$ minute, donc avant deux minutes.

**Question 4°. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.**

Parmi les trois propositions, il faut retenir celle qui comprend le terme constant $45e^{0,4} - 75$. En effet, la formule de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. En utilisant la dérivée fournie et la valeur de $f(2)$, cette expression se développe exactement sous la forme proposée dans la troisième réponse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La tangente au point d'abscisse 2 est $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$, soit la troisième proposition.

### C. Calcul intégral

**Question 1°. Parmi les trois propositions, choisir l'aire du rectangle OPQR en unités d'aire. Aucune justification n'est demandée.**

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ s'étend de l'abscisse 0 à l'abscisse 3 : sa largeur est donc 3 unités. Sa hauteur correspond à la droite supérieure $y = 2,25$, donc elle vaut 2,25 unités. L'aire du rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur. On choisit ainsi la valeur correspondante parmi les trois réponses proposées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'aire du rectangle $OPQR$ est $A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire : troisième proposition.

**Question 2°. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3, à l'aide de la primitive fournie.**

Sur $[0, 3]$, $g(x)$ est positive, donc l'aire recherchée est l'intégrale $\int_0^3 g(x)\,dx$. Avec la primitive donnée, on obtient $A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2 + 9)\right]_0^3$. Ainsi, $A_2 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2$. L'évaluation numérique donne environ $4,679$ unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

**Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en tenant compte de sa symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et arrondir au millième.**

Dans la moitié droite, l'aire hachurée est celle du rectangle moins celle sous la courbe : $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, son aire totale est $A = 2(A_1 - A_2)$. En remplaçant par les valeurs obtenues, $A = 2(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2) = 13,5 - \frac{27}{2}\ln 2$. On arrondit le résultat au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'aire totale de la pièce est $A = 13,5 - \frac{27}{2}\ln 2 \approx 4,142\ \text{m}^2$, au millième.

## 2. Probabilités et obsolescence programmée des smartphones

L'exercice porte sur l'obsolescence technique et logicielle de smartphones, puis sur la proportion de téléphones non réparables dans des lots du modèle A. Il se termine par un test bilatéral visant à vérifier une affirmation de sondage sur la marque B.

### A. Probabilités conditionnelles

**Question 1°. À partir des données portant sur 200 smartphones, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant obsolescence technique et obsolescence logicielle, avec les totaux correspondants.**

Sur 200 smartphones, 3 % sont touchés par T, soit 6, et 8 % par L, soit 16. Parmi les 16 touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2. Les autres cases se déduisent des totaux de ligne et de colonne :

| Smartphones | Touchés par L | Non touchés par L | Total |
|---|---|---|---|
| **Touchés par T** | 2 | 4 | 6 |
| **Non touchés par T** | 14 | 180 | 194 |
| **Total** | 16 | 184 | 200 |

✓ RÉPONSE À RETENIR

Cases intérieures, dans l'ordre du tableau : 2, 4, 14 et 180.

**Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique, L l'obsolescence logicielle et P_L(T) la probabilité de T sachant que L est réalisé.**

On reprend directement les fréquences données dans l'énoncé : 3 % des smartphones sont touchés par l'obsolescence technique et 8 % par l'obsolescence logicielle. La dernière donnée est conditionnelle : parmi les smartphones touchés par L, 12,5 % le sont aussi par T. Elle donne donc la probabilité de T sachant L, et non celle de L sachant T.

- P(T) = 0,03.
- P(L) = 0,08.
- $P_L(T) = 0{,}125$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T) = 0,03 ; P(L) = 0,08 ; $P_L(T) = 0{,}125$.

**Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L).**

La probabilité conditionnelle donnée dans l'énoncé est celle de T sachant que L est réalisé. Par définition, $P_L(T) = P(T \cap L) / P(L)$. On isole donc l'intersection en multipliant par $P(L)$ : $P(T \cap L) = 0{,}125 \times 0{,}08 = 0{,}010$. Cette valeur correspond aussi à 2 smartphones parmi les 200 étudiés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∩ L) = 0,010.

**Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L).**

Pour calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'une des deux formes d'obsolescence, on additionne les probabilités de T et de L. Il faut ensuite retrancher leur intersection, comptée deux fois dans cette somme.

$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∪ L) = 0,10.

**Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité de l'obsolescence logicielle sachant que l'obsolescence technique est réalisée.**

On cherche maintenant la probabilité de L sachant T, dans le sens inverse de la question précédente. On rapporte donc la probabilité de l'intersection à celle de T :

1. $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T)$.
2. $P_T(L) = 0,01 / 0,03 = 1/3$, soit environ 0,333 au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_T(L) \approx 0,333$.

## B. Loi binomiale

**Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.**

Chaque smartphone prélevé constitue un tirage, avec deux issues possibles : non réparable, de probabilité 0,045, ou réparable, de probabilité 0,955. Le stock étant suffisamment important, le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise : les tirages sont indépendants et la probabilité reste constante. X compte le nombre de smartphones non réparables sur 50 tirages ; elle suit donc une loi binomiale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

**Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.**

Pour que les 50 smartphones soient tous réparables, il faut qu'aucun ne soit non réparable. À chaque tirage, la probabilité d'obtenir un smartphone réparable est le complément de 0,045, soit 0,955. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, on multiplie cette probabilité par elle-même 50 fois :

1. $P(X = 0) = (1 - 0{,}045)^{50}$.
2. Au millième, la probabilité est 0,100.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est 0,100.

**Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme, puis recopier et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de S pour i allant de 0 à 3.**

À chaque étape, l'algorithme ajoute à S la probabilité associée à la valeur courante de i. Les probabilités se calculent avec la loi binomiale de paramètres 50 et 0,045. Le tableau indique les probabilités arrondies au millième et les sommes cumulées, elles aussi arrondies au millième :

| i | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **P(X = i)** | 0,100 | 0,236 | 0,272 | 0,205 |
| **S** | 0,100 | 0,336 | 0,608 | 0,813 |

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Valeurs successives de S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

**Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables.**

La boucle exécute quatre additions, pour i égal à 0, 1, 2 puis 3. À la fin, S représente donc la somme des probabilités de ces quatre valeurs de X. Il s'agit de la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. Le calcul donne environ 0,813, soit 81,3 % des lots.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots comptent au plus trois smartphones non réparables.

**Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat pour un lot de 50 smartphones.**

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ici, le nombre de tirages est 50 et la probabilité qu'un smartphone soit non réparable vaut 0,045. Ainsi, $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. Cette moyenne décrit le nombre de smartphones non réparables attendu par lot lorsqu'on considère un grand nombre de lots.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> E(X) = 2,25 smartphones non réparables par lot en moyenne.

## C. Test d'hypothèse

**Question 1°. Sous H0, choisir parmi les trois propositions la valeur approchée de h, arrondie au centième, telle que la probabilité que F soit comprise entre 0,55 - h et 0,55 + h soit égale à 0,95.**

Sous $H_0$, la fréquence suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central de probabilité 0,95 est délimité par les valeurs situées à environ 1,96 écart type de la moyenne. La demi-largeur vaut donc $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$, soit 0,07 au centième. Parmi les propositions, on choisit 0,07.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 0,07.

**Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.**

Pour ce test bilatéral au seuil de 5 %, la zone de conservation de $H_0$ est l'intervalle central indiqué par la question précédente. Avec h arrondi au centième, ses bornes sont 0,55 − 0,07 et 0,55 + 0,07. La règle de décision s'applique à la fréquence observée dans l'échantillon :

- Conserver $H_0$ si $0{,}48 \leq f \leq 0{,}62$.
- Rejeter $H_0$ si f est hors de cet intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conserver $H_0$ si $0{,}48 \leq f \leq 0{,}62$ ; sinon, la rejeter au seuil de 5 %.

**Question 3°. À partir des réponses de 76 personnes sur les 180 interrogées, appliquer la règle de décision et conclure au sujet du résultat du sondage.**

La fréquence observée est le nombre de réponses favorables divisé par l'effectif interrogé : f = 76/180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de la zone de conservation de $H_0$. Selon la règle du test bilatéral au seuil de 5 %, on rejette donc $H_0$. L'enquête ne valide pas l'affirmation du sondage selon laquelle la proportion serait de 55 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f ≈ 0,422 < 0,48 : on rejette $H_0$. La proportion de 55 % n'est pas validée par l'enquête.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

**Bilan de l'épreuve :** Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, code MATGRB1, durée deux heures; le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Deux exercices notés chacun sur 10 étudient le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse, intégration, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' - 0,2y = 0 sont de la forme y(t) = k e^(0,2t).
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : v(t) = f'(t); ici, convertir les km/min en km/h en multipliant par 60.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), E(X) = np et P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i).
- Dans un test bilatéral, comparer la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation déterminé sous l'hypothèse nulle.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : le temps est en minutes et la vitesse visée est exprimée en km/h.
- Distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T) dans les probabilités conditionnelles.
- Dans l'algorithme, actualiser S pour chaque valeur de i, de 0 à 3 inclusivement.
- Pour le test, calculer la fréquence observée, appliquer la règle de décision et formuler explicitement la conclusion.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment obtenir la vitesse à partir de la fonction distance ?**

La vitesse instantanée est la dérivée de la distance. Ici, f'(t) est exprimée en kilomètres par minute; pour la comparer à 400 km/h, il faut convertir en multipliant par 60.

**Q : Comment reconnaître une loi binomiale dans la partie sur les smartphones ?**

Le prélèvement porte sur 50 smartphones et est assimilé à des tirages avec remise. Chaque téléphone a la même probabilité 0,045 d'être non réparable; X suit donc une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

**Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?**

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, chacun divisé en trois parties indépendantes. Répartissez le temps selon vos acquis, gardez une marge pour les calculs et les arrondis, puis vérifiez les réponses et les unités.

**Q : Que faut-il montrer pour conclure correctement au test d'hypothèse ?**

Énoncez la règle de décision au seuil de 5 %, calculez la fréquence observée, puis indiquez si elle appartient à l'intervalle d'acceptation. La conclusion doit préciser si l'hypothèse nulle est rejetée ou non rejetée.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://coursbtsciel.fr/assets/annales/bts-ciel/E2 - Mathématiques/2018/BTS CIEL - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
**Ressources BTS Cybersécurité, Informatique et réseaux, Électronique :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.